

SCUOLA SECONDARIA DI II GRADO - ONLINE

1. Alessio e Barbara si sfidano ad un gioco con le seguenti regole. Ci sono n fiammiferi su di un tavolo: nel proprio turno, ogni giocatore deve rimuovere dal tavolo un numero di fiammiferi compreso tra 1 e 5.

Il giocatore costretto a togliere l'ultimo fiammifero perde; Alessio gioca per primo. Per quale di questi valori di n Barbara ha una strategia vincente?

- (A) 35 (B) 36 **(C) 37** (D) 40

Soluzione: la risposta è la (C). Se Alessio toglie k fiammiferi nel suo turno, Barbara ne può togliere $6-k$ quando tocca a lei.

In questo modo Barbara lascerà sul tavolo, al procedere dei turni, 31, 25, 19, 13, 7, 1 fiammifero, il quale sarà costretta a togliere Alessio alla fine, perdendo.

Per i valori delle altre alternative, invece, sarà Alessio a poter lasciare ad un certo punto sul tavolo un solo fiammifero, costringendo Barbara alla sua rimozione.

2. Due località balneari ottengono spesso il riconoscimento della *bandiera blu*, che certifica l'aderenza a determinati criteri di qualità.

Secondo le previsioni per quest'anno, la prima località ha una probabilità di ottenerla del 90%, mentre la seconda località ha una probabilità di ottenerla dell'80%.

Supponendo le assegnazioni indipendenti, qual è la probabilità che almeno una località la ottenga?

- (A) 72% **(B) 98%** (C) 100% (D) 170%

Soluzione: la risposta è la (B). Bisogna sommare le due probabilità, e poi diminuire il risultato della probabilità dell'intersezione, altrimenti il caso in cui entrambe la ottengono viene contato due volte.

Essendo la probabilità dell'intersezione uguale al prodotto delle probabilità sotto l'ipotesi di indipendenza, abbiamo $0.9 + 0.8 - 0.9 \cdot 0.8 = 0.98 = 98\%$.

3. Un'autostrada alterna un egual numero di tratti all'aperto di 2 km in cui il limite massimo di velocità è 130 km/h con tratti in galleria di 2 km di limite 110 km/h. La velocità media con cui è percorribile, al massimo, l'autostrada è:

- (A) inferiore a 120 km/h** (B) uguale a 120 km/h
(C) superiore a 120 km/h (D) dipende dal numero di tratti

Soluzione: la risposta è la (A). Il tempo necessario (in ore) a percorrere un tratto all'aperto è $2/130$, quello relativo ad un tratto in galleria è $2/110$.

In totale si percorrono così 4 km in $2/130 + 2/110 = 24/715$ ore, il che corrisponde a una velocità di $4 \cdot (715/24) = 715/6 \approx 119.2$ km/h.

Tale media è indipendente da quanti sono i tratti; è sufficiente, come specificato nel testo, che siano uguali in numero quelli all'aperto e quelli in galleria.

4. In un gioco a quiz si possono acquisire tra 200 e 300 punti per ogni risposta esatta, e si possono perdere tra 50 e 200 punti per ogni risposta errata; se ci si astiene, il punteggio resta invariato.
Quale di questi punteggi è impossibile avere dopo due domande?

- (A) 150 (B) 250 **(C) 350** (D) 450

Soluzione: la risposta è la (C). Se si risponde correttamente a entrambe le domande, si acquisiscono almeno $200 \cdot 2 = 400$ punti; se si risponde giusto a una e ci si astiene all'altra, se ne acquisiscono al più 300.

D'altro canto, gli altri punteggi si possono ottenere come: $150 = 200 - 50$ (esatta, errata); $250 = 250 + 0$ (esatta, astenuta); $450 = 250 + 200$ (esatta, esatta).

5. Due getti d'acqua G e H possono riempire una piscina: il getto G in 6 ore, il getto H in 9 ore. Il getto G viene aperto da solo per 2 ore, poi viene aperto anche il getto H. Dopo quante ore dall'inizio la piscina è completamente piena?

- (A) 4 ore esatte **(B) 4 ore abbondanti**
(C) 5 ore esatte (D) 5 ore abbondanti

Soluzione: la risposta è la (B). Nelle prime due ore, la piscina si riempie per $2/6 = 1/3$. Dopo, i due getti sono tali per cui ogni ora la piscina si riempie per $1/6 + 1/9 = 5/18$. Essa sarà dunque piena dopo un tempo supplementare t , dove t soddisfa $(1/3) + (5/18) \cdot t = 1$, ovvero $t = 12/5$.

$12/5$ di ora sono due ore abbondanti, che aggiunte alle due iniziali (quando solo G era in funzione), fanno 4 ore abbondanti.

6. Per preparare una bevanda alla frutta, una mensa scolastica dispone di 30 kg di una miscela di succo con il 20% di frutta e di un'altra miscela con il 50% di frutta.

Volendo ottenere una bevanda con il 30% di frutta utilizzando tutti i 30 kg della miscela al 20%, quanti kg della miscela al 50% bisogna aggiungere?

- (A) 5 (B) 10 **(C) 15** (D) 20

Soluzione: la risposta è la (C). Se S20 e S50 sono le miscele al 20% e al 50%, nell'intera disponibilità di S20 ci sono 6 kg di frutta; aggiungendovi x kg di S50, si aggiungono $x/2$ kg di frutta, quindi si dovrà risolvere l'equazione $(6 + x/2)/(30 + x) = 0.3$ (frutta totale/massa totale = 30%), da cui $x = 15$.

7. In una scuola il numero di studenti è minore di 5000.

Gli insegnanti osservano che, se ci fosse uno studente in più, sarebbe possibile dividerli in 2, 3, 5 oppure 6 gruppi con lo stesso numero di studenti, cosa che faciliterebbe l'organizzazione di alcune attività scolastiche. Sapendo che essi sono in numero corrispondente al valore più grande che soddisfa questi criteri, quanti sono gli studenti della scuola?

- (A) 4979** (B) 4981 (C) 4997 (D) non si può sapere

Soluzione: la risposta è la (A). Sia n il loro numero; allora $n+1$ deve essere un comune multiplo di 2, 3, 5 e 6, ovvero $n = k \cdot \text{mcm}(2,3,5,6) - 1$ per un certo k .

Noto che $\text{mcm}(2,3,5,6) = 30$, si ha $n = 30k - 1$, la cui più grande soluzione tale per cui $n < 5000$ si ottiene per $k = 166$ e $n = 4979$.

8. Nel campionato del mondo di Formula 1 vengono attribuiti per ogni gara 25 punti al primo classificato, 18 al secondo, 15 al terzo, e poi a decrescere fino al 10° posto. Se una stagione è composta da 24 gare che utilizzano questo sistema di attribuzione punti, quante gare bisogna vincere per essere sicuri di vincere il mondiale indipendentemente da tutti gli altri risultati?

- (A) 13 (B) 15 (C) 17 **(D) 19**

Soluzione: la risposta è la (D). Il caso peggiore per chi vince di più è che un avversario arrivi sempre secondo dietro di lui quando vince, mentre arrivi primo quando lui, non vincendo, si ritira non prendendo punti.

Vincendo 18 gare si ottengono $18 \cdot 25 = 450$ punti, mentre con 6 primi e 18 secondi posti si ottengono $6 \cdot 25 + 18 \cdot 18 = 474$ punti; 18 vittorie possono non bastare.

Vincendo 19 gare si ottengono $19 \cdot 25 = 475$ punti mentre con 5 primi e 19 secondi posti si ottengono $5 \cdot 25 + 19 \cdot 18 = 467$ punti; 19 vittorie sono sempre sufficienti.

9. La terza legge di Keplero afferma che il quadrato del tempo di rivoluzione di un pianeta attorno alla sua stella è proporzionale al cubo del semiasse maggiore della sua orbita, ovvero della distanza dalla stella nel caso di orbita circolare.

Se in un sistema solare di stella S ci sono due pianeti P1 e P2 tali per cui la distanza tra S e P2 è una volta e mezza quella tra S e P1, allora il rapporto tra tempo di rivoluzione di P2 e quello di P1 è:

- (A) 1.5 **(B) tra 1.5 e 2** (C) 2 (D) maggiore di 2

Soluzione: la risposta è la (B). Se il rapporto tra le distanze è 1.5, quello fra i loro cubi è $1.5^3 = 3.375$. Per la terza legge di Keplero, 3.375 è anche il rapporto tra i quadrati dei tempi di rivoluzione, quindi il rapporto tra gli stessi è la radice quadrata di 3.375, che è più grande di 1.5 ($1.5^2 = 2.25$) e più piccola di 2 ($2^2 = 4$).

10. Il numero di utenti di una nuova piattaforma di videogiochi online raddoppia circa ogni due anni.

Se nel 2010 gli utenti erano circa 1 milione, si può prevedere che il numero di utenti supererà il miliardo nel:

- (A) 2030** (B) 2035 (C) 2040 (D) 2045

Soluzione: la risposta è la (A). Dal momento che $2^{10} = 1024 \approx 1000$, servono circa 10 raddoppi per passare da un milione a un miliardo (mille milioni).

Avvenendo un raddoppio ogni due anni, sono necessari circa $10 \cdot 2 = 20$ anni, ovvero si stimerà di raggiungere tale quota intorno all'anno $2010 + 20 = 2030$.